

17. 【解】(1) 原式 $= a(m^2 - 4m + 4) = a(m-2)^2$.

(2) 原式 $= a^2(x-y) - b^2(x-y) = (a^2 - b^2)(x-y) = (a+b)(a-b)(x-y)$.

18. 【解】(1) 设 $x+y=M$, 则原式 $= M(M-4)+4 = M^2 - 4M + 4 = (M-2)^2$, 将 $M=x+y$ 代入, 得原式 $= (x+y-2)^2$.

(2) 原式 $= (a-1)(a-4)(a-2)(a-3)+1 = (a^2-5a+4)(a^2-5a+6)+1$. 令 $N=a^2-5a+4$.

因为 a 为正整数, 所以 $N=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$ 也是整数, 则原式 $= N(N+2)+1 = N^2+2N+1=(N+1)^2$. 因为 N 为整数, 所以原式 $= (N+1)^2$ 为整数的平方, 即 $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1$ 为整数的平方.

19. 【解】(1) 当 $x=\pm 2$ 时, $x^2-4=0$, 所以 $x^2-4=(x+2)(x-2)$, 故答案为 $\pm 2, (x+2)(x-2)$.

(2) 由题意可知 $x^3-x^2-3x+3=(x-1)(x^2+ax+b)$, 所以 $x^3-x^2-3x+3=x^3-(1-a)x^2-(a-b)x-b$, 所以 $1-a=1, b=-3$, 所以 $a=0, b=-3$.

(3) 当 $x=2$ 时, $x^3+4x^2-3x-18=8+16-6-$

思路分析

(2) 将原式变形为 $(a^2-5a+4)(a^2-5a+6)+1$. 令 $N=a^2-5a+4$, 据此可得原式 $= N(N+2)+1 = N^2+2N+1 = (N+1)^2$, 根据 a 为正整数可做出判断.

$18=0$, 所以多项式中有因式 $x-2$. 设另一个因式为 x^2+mx+n , 所以 $x^3+4x^2-3x-18=(x-2)(x^2+mx+n)$, 所以 $x^3+4x^2-3x-18=x^3+(m-2)x^2-(2m-n)x-2n$, 所以 $m-2=4, 2n=18$, 所以 $m=6, n=9$, 所以 $x^3+4x^2-3x-18=(x-2)(x^2+6x+9)=(x-2)(x+3)^2$.

20. 【解】(1) 因为 $8=2^2+2^2$, 所以 8 是完美数. (答案不唯一)

因为 $34=3^2+5^2$, 所以 34 是完美数.

(2) $S=x^2+4y^2+4x-12y+k=x^2+4x+4+(4y^2-12y+9)+k-13=(x+2)^2+(2y-3)^2+k-13$. 因为 x, y 是整数, 所以 $x+2, 2y-3$ 也是整数, 所以当 $k-13=0$, 即 $k=13$ 时, S 是完美数.

(3) 设 $A=a^2+b^2, B=c^2+d^2$ (a, b, c, d 都是整数), 则 $A \times B = (a^2+b^2) \times (c^2+d^2) = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2+2abcd-2abcd = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$. 因为 a, b, c, d 都是整数, 所以 ac, bd, ad, bc 都是整数, 所以 $A \times B$ 是完美数.

第5章 分式

5.1 分式的意义

刷基础

1. C 【解析】 $\frac{5}{6}(1-x), \frac{4x}{\pi-2}, \frac{x-y}{2}$ 是整式, 不是

分式; $\frac{3}{x}, \frac{4}{x^2}$ 是分式, 所以分式有 2 个, 故选 C.

2. $\frac{1}{x^2-1}$ (答案不唯一) 【解析】根据分式的定义, 可以组成的分式有 $\frac{1}{x^2-1}, \frac{1}{x+1}, \frac{x+1}{x^2-1}$ 等, 故

答案为 $\frac{1}{x^2-1}$ (答案不唯一).

3. A 【解析】因为分式 $\frac{1}{x+1}$ 有意义, 所以 $x+1 \neq 0$, 解得 $x \neq -1$. 故选 A.

4. D 【解析】由题意可知 $(x-2)(x-3) \neq 0$, 所以 $x \neq 2$ 且 $x \neq 3$. 故选 D.

5. $-\frac{3}{2}$ 【解析】因为当 $x=3$ 时, 分式 $\frac{x-b}{x+2b}$ 没有意义, 所以当 $x=3$ 时, $x+2b=0$, 即 $3+2b=0$, 所

关键点拨

判断分式的依据是看分母中是否含有字母, 若含有字母则是分式, 若不含有字母则不是分式.

关键点拨

一个分式的值为整数, 则分子是分母的整数倍.

刷有所得

分母为零, 分式无意义; 分母不为零, 分式有意义.

以 $b=-\frac{3}{2}$. 故答案为 $-\frac{3}{2}$.

6. 【解】因为 $x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$, 所以无论 x 取何值, 分式 $\frac{x^2-3x-4}{x^2-4x+6}$ 一定有意义.

7. A 【解析】因为分式 $\frac{(x-3)(x+1)}{x+1}$ 的值为 0, 所以 $x-3=0$, 所以 $x=3$. 故选 A.

8. 【解】因为 $\frac{\sqrt{x+2y}+|x^2-4|}{x-2}=0$, 所以 $\sqrt{x+2y}+|x^2-4|=0, x-2 \neq 0$, 所以 $\begin{cases} x+2y=0, \\ x^2-4=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=1, \end{cases}$ 所以 $2x+y=2 \times (-2)+1=-3$.

9. C 【解析】因为 $\frac{6}{2x+3}$ 表示一个整数且 x 是整数, 所以 $2x+3=\pm 1$ 或 $2x+3=\pm 2$ 或 $2x+3=\pm 3$ 或 $2x+3=\pm 6$. 当 $2x+3=1$ 时, $x=-1$; 当 $2x+3=-1$ 时, $x=-2$; 当 $2x+3=2$ 时, $x=-\frac{1}{2}$ (不合题

意,故舍去);当 $2x+3=-2$ 时, $x=-\frac{5}{2}$ (不合题意,故舍去);当 $2x+3=3$ 时, $x=0$;当 $2x+3=-3$ 时, $x=-3$;当 $2x+3=6$ 时, $x=\frac{3}{2}$ (不合题意,故舍去);当 $2x+3=-6$ 时, $x=-\frac{9}{2}$ (不合题意,故舍去). 综上,整数 x 的取值有 $-1, -2, 0, -3$, 共 4 个. 故选 C.

10. C 【解析】因为当 $x=-4$ 时,原分式无意义,所以 $-4+m=0$,解得 $m=4$,故 B 选项正确,不符合题意;由 $m=4$ 得原分式为 $\frac{3x-n}{x+4}$,因为当 $x=2$ 时,原分式的值为 0,所以 $\frac{2 \times 3 - n}{2+4} = 0$,解得 $n=6$,故 A 选项正确,不符合题意;由 $m=4, n=6$ 得原分式为 $\frac{3x-6}{x+4}$,当 $x=0$ 时,原分式的值为 $b = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$,故 D 选项正确,不符合题意;因为当 $x=-1$ 时,原分式的值为 $a = \frac{-9}{3} = -3$,故 C 选项错误,符合题意. 故选 C.

11. $\frac{5}{4}$ 【解析】因为 $2x-3y=0$,所以 $y=\frac{2}{3}x$,所以 $\frac{x+y}{2x-y} = \frac{x+\frac{2}{3}x}{2x-\frac{2}{3}x} = \frac{\frac{5}{3}x}{\frac{4}{3}x} = \frac{5}{4}$,故答案为 $\frac{5}{4}$.

12. B 【解析】由题知, A、B 两城的距离为 60t 千米,该车提速后从 A 城到 B 城的速度是 $(60+v)$ 千米/时,则该车从 A 城到 B 城需要的时间是 $\frac{60t}{v+60}$ 小时. 故选 B.

5.2 分式的基本性质

课时 1 分式的基本性质及其应用

刷基础

1. C 【解析】分子和分母同时乘 -1 ,得 $\frac{-1 \times (-1)}{(a-2) \times (-1)} = \frac{1}{-(a-2)} = \frac{1}{2-a}$. 故选 C.

2. D 【解析】原分式为 $\frac{5}{a}$,分子加 10 后所得分式为 $\frac{15}{a}$,即分子变为原来的 3 倍. 要使分式的值不变,则根据分式的基本性质,分母也需变为原来的 3 倍,即 $a \times 3 = 3a$. 因为原分母为 a ,

思路分析

根据题表给出的信息分别求出 a, b, m, n 的值,再进行判断即可.

刷有所得

由约分的概念可知,分式约分前要先将分子、分母分别转化为乘积的形式,再找出分子、分母的最大公因式并约去,注意不要忽视数字系数的约分.

关键点拨

分子、分母没有公因式的分式叫最简分式.

所以分母应该加上 $3a-a=2a$. 故选 D.

3. C 【解析】由题意可知将原分式的分子与分母同时乘 -1 ,得 $\frac{-3x+1}{-x^2+7x-2} =$

$$\frac{(-3x+1) \times (-1)}{(-x^2+7x-2) \times (-1)} = \frac{3x-1}{x^2-7x+2}, \text{ 故选 C.}$$

4. $\frac{6m-4n}{24m+3n}$ 【解析】 $\frac{0.5m - \frac{1}{3}n}{2m + \frac{1}{4}n} = \frac{(0.5m - \frac{1}{3}n) \times 12}{(2m + \frac{1}{4}n) \times 12} =$

$$\frac{6m-4n}{24m+3n}, \text{ 故答案为 } \frac{6m-4n}{24m+3n}.$$

5. $\frac{y}{3x}$ 分式的基本性质 【解析】分式 $\frac{2xy^4}{6x^2y^3}$ 的分

子和分母同时除以 $2xy^3$,得 $\frac{y}{3x}$,依据是分式的基本性质.

6. $\frac{x+1}{x-1}$ 【解析】 $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$. 故答案为 $\frac{x+1}{x-1}$.

7. 【解】原式 $= \frac{a(a^2-4b^2)}{a(a^2-4ab+4b^2)} = \frac{a(a+2b)(a-2b)}{a(a-2b)^2} = \frac{a+2b}{a-2b}$.

$$\text{当 } a=-2, b=\frac{1}{2} \text{ 时, 原式 } = \frac{-2+2 \times \frac{1}{2}}{-2-2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

8. B 【解析】因为 $\frac{x^2-2x}{2y-xy} = -\frac{x}{y}$, $\frac{12xy}{9z^3} = \frac{4xy}{3z^3}$,所以 $\frac{x^2-2x}{2y-xy}, \frac{x+1}{x^2+1}, \frac{-2}{a^2-2a}, \frac{12xy}{9z^3}$ 中,最简分式为 $\frac{x+1}{x^2+1}, \frac{-2}{a^2-2a}$,共 2 个. 故选 B.

9. $\frac{8(x-3)}{x-2}$ (答案不唯一) 【解析】若 $x=2$ 时,分式无意义,则分母可以是 $x-2$;若 $x=3$ 时,分式值为 0,则分子的一个因式可以是 $x-3$;若 $x=4$ 时,分式值为 4,则分子的另一个因式可以是 8. 综上所述,该分式可以是 $\frac{8(x-3)}{x-2}$. 故答案为 $\frac{8(x-3)}{x-2}$ (答案不唯一).

刷易错

10. 【解】甲同学将分式的分子、分母同时除以 $a+b$, 而由分式有意义可知 $a+b \neq 0$, 所以甲同学的解法正确; 乙同学将分式的分子、分母同时乘 $a-b$, 但 $a-b$ 是否等于 0 是不确定的, 所以乙同学的解法不正确.

课时 2 分式约分的综合应用



刷基础

1. A 【解析】因为 $x^2-3x-4=0$, 所以 $x^2-4=3x$, 所以 $\frac{x}{x^2-x-4} = \frac{x}{3x-x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$. 故选 A.

2. B 【解析】设 $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = k (k \neq 0)$, 则 $x=3k$, $y=5k$, $z=7k$, 代入分式 $\frac{x-y+z}{x+y-z}$, 得 $\frac{x-y+z}{x+y-z} = \frac{3k-5k+7k}{3k+5k-7k} = \frac{5k}{k} = 5$. 故选 B.

3. $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $a+b=3ab$, 所以 $\frac{3a-7ab+3b}{a+ab+b} = \frac{3(a+b)-7ab}{a+ab+b} = \frac{3 \times 3ab - 7ab}{3ab+ab} = \frac{2ab}{4ab} = \frac{1}{2}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$.

4. -1 【解析】因为 $xy-x+y=0$, 且 $xy \neq 0$, 所以 $x-y=xy$, 所以 $\frac{-y^2+2xy-x^2}{x^2y^2} = \frac{-(x^2-2xy+y^2)}{x^2y^2} = \frac{-(x-y)^2}{x^2y^2} = \frac{-(xy)^2}{x^2y^2} = \frac{-x^2y^2}{x^2y^2} = -1$, 故答案为 -1.

5. 【解】由条件可知 $y \neq 0$, 因此 $y^2 \neq 0$. 原式 = $\frac{(x^2-3xy+2y^2) \div y^2}{(2x^2-3xy+y^2) \div y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x}{y} + 2}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x}{y} + 1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3 \times \frac{2}{3} + 2}{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3 \times \frac{2}{3} + 1} = -4$.

另解 由条件可知 $x \neq 0$, 因此 $x^2 \neq 0$. 因为 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, 所以 $y = \frac{3}{2}x$, 所以 $\frac{x^2-3xy+2y^2}{2x^2-3xy+y^2} = \frac{x^2-3x \cdot \frac{3}{2}x + 2\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2x^2-3x \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}x\right)^2} = \frac{x^2-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^2}{2x^2-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{4}x^2} = \frac{x^2}{-\frac{1}{4}x^2} = -4$.

易错警示

分式的基本性质是分式的分子与分母都乘 (或除以) 同一个不等于零的整式, 分式的值不变, 这里要特别注意不等于零的条件, 避免出错.

刷有所得

分式求值是考试中出现次数较多的题型, 在解答时应从已知条件和所求问题的特点出发, 通过适当的变形、转化, 才能发现解题的捷径.

6. 【解】由题可知 $a \neq 0, b \neq 0$, 所以 $\frac{a+ab-b}{2a-3ab-2b} =$

$$\frac{(a+ab-b) \div ab}{(2a-3ab-2b) \div ab} = \frac{\frac{1}{b} + 1 - \frac{1}{a}}{2 \cdot \frac{1}{b} - 3 - 2 \cdot \frac{1}{a}} = \frac{-\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + 1}{-2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - 3}. \text{ 因为 } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2, \text{ 所以原式} = \frac{-2+1}{-2 \times 2 - 3} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}.$$

7. 【解】(1) 原式 = $\frac{3x^2+x}{x^2-x} = \frac{x(3x+1)}{x(x-1)} = \frac{3x+1}{x-1}$.
(2) 原式 = $\frac{a^{n+2}-a^2b^n}{a^{2n+1}-ab^{2n}} = \frac{a^2(a^n-b^n)}{a(a^n+b^n)(a^n-b^n)} = \frac{a}{a^n+b^n}$.

$$(3) \text{ 原式} = \frac{4y^2-x^2}{-x^2+4xy-4y^2} = \frac{(2y+x)(2y-x)}{-(x-2y)^2} = \frac{x+2y}{x-2y}.$$

$$(4) \text{ 原式} = \frac{a^2-5a+6}{a^2-a-2} = \frac{(a-2)(a-3)}{(a-2)(a+1)} = \frac{a-3}{a+1}.$$

8. 【解】由题意得 $(a+b) \cdot h = a^2-b^2$, 所以 $h = \frac{(a^2-b^2) \div (a+b)}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b$.



刷提升

1. C 【解析】设 $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = k$, 则 $a=k(b+c)$, $b=k(c+a)$, $c=k(a+b)$, 所以 $a+b+c = 2k(a+b+c)$. 当 $a+b+c \neq 0$ 时, $k = \frac{1}{2}$, 此时 $b+c=2a, c+a=2b, a+b=2c$, 所以 $a=b=c$, 所以 $\frac{2a+2b+c}{a+b-3c} = \frac{5c}{-c} = -5$; 当 $a+b+c=0$ 时, $b+a=-c$, 所以 $k=-1$, 所以 $\frac{2a+2b+c}{a+b-3c} = \frac{-2c+c}{-c-3c} = \frac{1}{4}$. 综上, $\frac{2a+2b+c}{a+b-3c}$ 的值为 -5 或 $\frac{1}{4}$. 故选 C.

2. D 【解析】由 a, b 两数互为相反数, 且 $b > a$ 可得, $b > 0, a < 0$, 且 $a = -b$, 所以 $\frac{a}{b} = \frac{-b}{b} = -1$, ab 是负数, 故①②正确; $\frac{a-1}{b+1} = \frac{-b-1}{b+1} = \frac{-(b+1)}{b+1} = -1$, 是负数, 故③正确; $\frac{a+66}{b+66} = \frac{-b+66}{b+66}$, 当 $0 < b < 66$ 时分式是正数, 当 $b > 66$ 时分式是负数, 故④错误; $(a+66)(b+66) = (-b+66)(b+66)$,

可以利用平方差公式计算,故⑤正确. 故选 D.

3. B 【解析】由题意得,分成的四部分中①与②相同,③与④相同,且③与④组成的是边长为 $a+b$ 的正方形. 设①与②的短直角边长为 x .

$$\text{因为 } \frac{S_{\text{①}}}{S_{\text{③}}} = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } \frac{\frac{1}{2}x(a+b)}{\frac{1}{2}(a+b)(a+b)} = \frac{1}{4}, \text{ 所以}$$

$$a+b=4x. \text{ 由题图(2)知, } a+x=b, \text{ 所以 } a=\frac{3}{2}x,$$

$$b=\frac{5}{2}x, \text{ 所以 } \frac{a}{b} = \frac{3}{5}, \text{ 故选 B.}$$

4. 【解】 因为 $a^3+(a-b)^3=[a+(a-b)][a^2-a(a-b)+(a-b)^2]=[a+(a-b)](a^2-a^2+ab+a^2-2ab+b^2)=[a+(a-b)](a^2-ab+b^2)$, 所以 $\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{[a+(a-b)](a^2-ab+b^2)}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$.

5. 【解】 (1) $(a \oplus b) - (a \odot b) = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$, 故答案为 $(a-b)^2$.

(2) 因为 $\frac{a \oplus b}{a \odot b} = 1$, 所以 $\frac{a^2+b^2}{2ab} = 1$, 所以 $a^2+b^2=2ab$, 所以 $(a-b)^2=0$, 所以 $a=b$, 所以 $\frac{3a^2-2ab+3b^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{3a^2-2a^2+3a^2}{a^2+a^2+a^2}=\frac{4}{3}$.

(3) $(a \oplus b) \odot 2 = (a^2+b^2) \odot 2 = 4a^2+4b^2$, $a \oplus (b \odot 2) = a \oplus (4b) = a^2+16b^2$. 因为 $(a \oplus b) \odot 2 = a \oplus (b \odot 2)$, 所以 $4a^2+4b^2=a^2+16b^2$, 所以 $a^2-4b^2=0$, 所以 $(a-2b)(a+2b)=0$, 解得 $a=2b$ 或 $a=-2b$.

刷素养

6. 【解】 (1) 因为 $\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}$, 所以

$\frac{x+1}{x^2-1}$ 是“好看分式”. 因为 $\frac{x+1}{x^2+1}$ 无法约分, 所以

$\frac{x+1}{x^2+1}$ 不是“好看分式”. 故答案为 $\frac{x+1}{x^2-1}$.

(2) ① $2x^2+4x=2x(x+2)$. 因为分式 $\frac{x+a}{2x^2+4x}$ 为

“好看分式”, 所以 $x+a=x+2$, 所以 $a=2$.

② 由题意得, x^2+mx+2 中有一个因式为 $x-1$. 设另一个因式为 $x+k$, 则 $x^2+mx+2=(x-1)(x+k)=x^2+(k-1)x-k$, 所以 $-k=2$, 即 $k=-2$, 所以 $m=k-1=-3$.

5.3 分式的乘除

刷基础

1. D 【解析】因为 $\frac{1}{a} \div \frac{3}{a} = \frac{1}{a} \times \frac{a}{3} = \frac{1}{3}$, 所以能

刷有所得

分式乘法法则: 分式乘分式, 用分子的积作积的分子, 分母的积作积的分母. 进行分式乘法运算时, 可先相乘后约分, 也可先约分后相乘.

使等式恒成立的运算符号是 \div , 故选 D.

2. D 【解析】 $\frac{x}{x-y} \div \frac{2x}{y^2-x^2} = \frac{x}{x-y} \times \frac{(y-x)(y+x)}{2x} = \frac{-y-x}{2} = -\frac{x+y}{2}$, 故选 D.

3. A 【解析】由题意得 $M = \frac{3x}{x^2-y^2} \div \frac{1}{x-y} = \frac{3x}{(x+y)(x-y)} \cdot (x-y) = \frac{3x}{x+y}$. 故选 A.

4. 6xy 【解析】 $\frac{-3xy^2}{4z} \cdot \frac{-8z}{y} = \frac{3xy^2 \cdot 8z}{4z \cdot y} = 6xy$. 故答案为 $6xy$.

5. ± 1 【解析】 $\frac{m^2+4m+4}{m^2-4} \div \frac{m^2+2m}{m-2} = \frac{(m+2)^2}{(m+2)(m-2)} \cdot \frac{m-2}{m(m+2)} = \frac{1}{m}$. 因为 m 等于它的倒数, 所以 $m=\pm 1$, 所以原式 $=\frac{1}{m}=\pm 1$, 故答案为 ± 1 .

6. 【解】 (1) $\frac{x^2+x}{x} \cdot \frac{2x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x} \cdot \frac{2x}{x+1} = 2x$.

(2) $\frac{a-1}{a^2-4a+4} \div \frac{a^2-1}{a^2-4} = \frac{a-1}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a+2}{(a-2)(a+1)} = \frac{a+2}{a^2-a-2}$.

(3) $\frac{x+3}{x^2-2x+1} \div \frac{x^2+3x}{(x-1)^2} = \frac{x+3}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x+3)} = \frac{1}{x}$.

(4) $(xy-x^2) \div \frac{x-y}{xy} = -x(x-y) \cdot \frac{xy}{x-y} = -x \cdot xy = -x^2y$.

7. C 【解析】 $\left(\frac{3y}{-2x}\right)^2 \cdot \left(\frac{2x}{3y}\right)^3 = \frac{9y^2}{4x^2} \times \frac{8x^3}{27y^3} = \frac{2x}{3y}$. 故选 C.

8. 【解】 (1) $\left(\frac{a^2}{-b^3}\right)^4 = \frac{(a^2)^4}{(-b^3)^4} = \frac{a^8}{b^{12}}$.

(2) $\left(\frac{x^2y}{-z^2}\right)^3 = \frac{(x^2y)^3}{(-z^2)^3} = -\frac{x^6y^3}{z^6}$.

(3) $\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{x}\right)^4 = \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^8}{x^4} = \frac{y^6}{x^2}$.

刷易错

易错警示

容易忽略分式有意义的条件, 即分母不为 0 致错. 对于本题而言, a 不能取 0, ± 1 , b 不能取 0.

9. 【解】 ① 运算顺序错误 ④ 当 $a=1$ 时, $a^2-1=0$, 原式无意义

正确解答过程: $(a-1) \div \frac{a^2-1}{a+1} \cdot \frac{a+1}{ab^2} = (a-1) \cdot \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{ab^2} = \frac{a+1}{ab^2}$,

1) $\cdot \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{ab^2} = \frac{a+1}{ab^2}$,

当 $a=2, b=2$ 时, 原式 $=\frac{3}{8}$. (a, b 的值不唯一)

刷提升

1. **B** 【解析】原式 $= \frac{x-2}{(x-2)^2} \times (x+6) = \frac{x+6}{x-2} =$

$\frac{x-2+8}{x-2} = 1 + \frac{8}{x-2}$. 因为代数式 $\frac{x-2}{x^2-4x+4} \div \frac{1}{x+6}$ 的

值为 F , 所以 $F = 1 + \frac{8}{x-2}$ ($x \neq 2$ 且 $x \neq -6$). 当

$x-2 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, 即 $x = 3, 1, 4, 0, 6, -2,$

$10, -6$ 时, $1 + \frac{8}{x-2}$ 为整数值. 因为 $x \neq 2$ 且

$x \neq -6$, 所以当 $x = 3, 1, 4, 0, 6, -2, 10$ 时, F 为整数值. 故选 B.

2. $(x+2) \cdot \frac{1}{x^2-4}$ (答案不唯一) 【解析】由题意

得, 符合条件的分式乘法的题目可以是 $(x+$

$2) \cdot \frac{1}{x^2-4}$. 故答案为 $(x+2) \cdot \frac{1}{x^2-4}$ (答案不唯一).

3. $(x-2y)^2$ 【解析】因为 $(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a+b+a-b)(a+b-a+b) = 4ab$, 所以 $a \ast b =$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$. 因为 $A \ast \frac{1}{4x^2-16y^2} =$

$\frac{x-2y}{x+2y}$, 所以 $4A \cdot \frac{1}{4x^2-16y^2} = \frac{x-2y}{x+2y}$, 所以 $A =$

$\frac{x-2y}{x+2y} \div \frac{4}{4x^2-16y^2} = \frac{x-2y}{x+2y} \cdot \frac{4(x+2y)(x-2y)}{4} =$

$(x-2y)^2$, 故答案为 $(x-2y)^2$.

4. 52% 【解析】由题意可知, 小球的直径为 $2r$, 每个小球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$, 小球的总数为 $\frac{a}{2r}$.

$\frac{b}{2r} = \frac{ab}{4r^2}$, 所以小球的总体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{ab}{4r^2} =$

$\frac{\pi rab}{3}$. 因为长方体纸箱的容积为 $ab \times 2r = 2abr$,

所以纸箱的空间利用率为 $\frac{\frac{\pi rab}{3}}{2abr} \times 100\% = \frac{\pi}{6} \times 100\% \approx 52\%$, 故答案为 52%.

5. 【解】 $A = xy - x^2 = x(y-x)$, $B = \frac{x^2-2xy+y^2}{xy} =$

$\frac{(x-y)^2}{xy}$, $C = \frac{x^2}{x-y}$. 因为 $A \div B = C \times D$, 所以 $x(y-x)$

$\div \frac{(x-y)^2}{xy} = \frac{x^2}{x-y} \times D$, 所以 $D = x(y-x) \times$

思路分析

先确定小球的数量, 然后计算出小球的总体积和纸箱的容积, 最后计算出二者的比值, 即为纸箱的空间利用率.

思路分析

(3) 将 $m = 2$ 代入 (2) 中的结论, 进而可得出 a, b, c, d 的值, 再对所求分式化简求值即可.

$\frac{xy}{(x-y)^2} \times \frac{x-y}{x^2} = -y$, 所以 $D = -y$.

6. 【解】(1) 设被墨水污染的部分是 A . 由题意得

$\frac{x-4}{x^2-9} \div \frac{A}{x-3} = \frac{1}{x+3}$, 即 $\frac{x-4}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{x-3}{A} = \frac{1}{x+3}$,

所以易得 $\frac{x-4}{A} = 1$, 所以 $A = x-4$, 故被墨水污染的部分为 $x-4$.

(2) 不能, 理由如下: 若 $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$, 则 $x = 4$. 原

式 $= \frac{x-4}{x^2-9} \div \frac{x-4}{x-3} = \frac{x-4}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x-4}$, 当 $x = 4$ 时, 原分

式无意义, 所以结果 $\frac{1}{x+3}$ 不能等于 $\frac{1}{7}$.

刷素养

7. 【解】(1) 根据题意, 得 $\left(\frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^5} +$

$\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{x^8} - 1$. 故答案为 $\frac{1}{x^8} - 1$.

(2) 由 (1) 可知, $\left(\frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} +$

$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{x^8} - 1$,

所以 $\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 =$

$\left(\frac{1}{x^8} - 1\right) \div \left(\frac{1}{x} - 1\right)$. 因为 $\frac{1}{x} = m$ ($m \neq 1$),

所以 $m^7 + m^6 + m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = \frac{m^8 - 1}{m - 1} =$

$\frac{(m^4 - 1)(m^4 + 1)}{m - 1} = \frac{(m^2 - 1)(m^2 + 1)(m^4 + 1)}{m - 1} =$

$\frac{(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1)(m^4 + 1)}{m - 1} = (m + 1)(m^2 +$

$1)(m^4 + 1)$, 所以 $m^7 + m^6 + m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = (m + 1)(m^2 + 1)(m^4 + 1)$.

(3) 由 (2) 可知, $m^7 + m^6 + m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = (m + 1)(m^2 + 1)(m^4 + 1)$,

所以当 $m = 2$ 时, $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) = 3 \times 5 \times 17$.

因为 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = a \cdot b \cdot c \cdot d$, 所以 $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1 \times 3 \times 5 \times 17$.

又因为 a, b, c, d 都是正整数, 且 $a > b > c > d$,

所以 $a = 17, b = 5, c = 3, d = 1$.

$\left(-\frac{b}{cd}\right)^2 \div \left(-\frac{5b}{17c}\right) \times \frac{6b}{a} = \frac{b^2}{c^2 d^2} \times \left(-\frac{17c}{5b}\right) \times$

$$\frac{6b}{a} = -\frac{17 \times 6b^2}{5acd^2}.$$

当 $a=17, b=5, c=3, d=1$ 时,

$$\text{原式} = -\frac{17 \times 6 \times 5^2}{5 \times 17 \times 3 \times 1^2} = -10.$$

5.4 分式的加减

课时 1 同分母分式的加减



刷基础

1. **B** 【解析】原式 $= \frac{a-1+1}{a} = 1$. 故选 B.

2. **A** 【解析】 $\frac{2m}{2m+n} - \frac{m-n}{n+2m} = \frac{2m-m+n}{2m+n} = \frac{m+n}{n+2m}$,
故选 A.

3. **C** 【解析】因为 $\frac{1}{x-1} = A - \frac{3x-4}{x-1}$, 所以 $A =$
 $\frac{3x-4}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3x-4+1}{x-1} = \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$. 故选 C.

4. **B** 【解析】因为 $P = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, Q = \frac{2ab}{a^2-b^2}$, 所以 $P -$
 $Q = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$. 因为 $a >$
 $b > 0$, 所以 $a-b > 0, a+b > 0$, 所以 $\frac{a-b}{a+b} > 0$, 所以 $P -$
 $Q > 0$, 所以 $P > Q$. 故选 B.

5. $\frac{a-1}{a-1}$ 【解析】 $\frac{a^2+1}{a-1} + \frac{2a}{1-a} = \frac{a^2+1}{a-1} - \frac{2a}{a-1} =$
 $\frac{a^2+1-2a}{a-1} = \frac{(a-1)^2}{a-1} = a-1$, 故答案为 $a-1$.

6. $-\frac{1}{a}$ 【解析】当 $x=a (a \neq 0)$ 时, $\frac{x-1}{x+1} = \frac{a-1}{a+1}$,
当 $x = \frac{1}{a} (a \neq 0)$ 时, $\frac{x-1}{x+1} = \frac{\frac{1}{a}-1}{\frac{1}{a}+1} = \frac{1-a}{1+a}$. 因为

$\frac{a-1}{a+1} + \frac{1-a}{1+a} = 0$, 所以当 $x = 2\ 025$ 时与当 $x =$
 $\frac{1}{2\ 025}$ 时相加所得的代数式的值为 0, 当 $x =$

$2\ 024$ 时与当 $x = \frac{1}{2\ 024}$ 时相加所得的代数式的

值为 0, 当 $x = 2\ 023$ 时与当 $x = \frac{1}{2\ 023}$ 时相加所

得的代数式的值为 0, ..., 当 $x = 2$ 时与当 $x =$

$\frac{1}{2}$ 时相加所得的代数式的值为 0, 当 $x = 1$ 时

关键点拨

本题主要考查
分式的大小比
较, 通过作差
法比较大小
即可.

刷有所得

常取各分母的
系数的最小公
倍数与各分母
所有字母的最
高次幂的积为
公分母.

代数式的值为 0. 因为当 $x=0$ 时 $\frac{x-1}{x+1} = -1$, 所
以这些分式的值的和等于 -1 , 故答案为 -1 .

7. 【解】(1) 原式 $= \frac{x-2y}{2x-y} + \frac{x+y}{2x-y} = \frac{x-2y+x+y}{2x-y} =$
 $\frac{2x-y}{2x-y} = 1$.

(2) 原式 $= \frac{a+b}{a+b} + \frac{2a-b}{a+b} = \frac{a+b+2a-b}{a+b} = \frac{3a}{a+b}$.

(3) 原式 $= \frac{a^2}{(a-b)^2} - \frac{2ab-b^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2-(2ab-b^2)}{(a-b)^2} =$
 $\frac{a^2-2ab+b^2}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} = 1$.

(4) 原式 $= \frac{3x}{x-4y} - \frac{x+y}{x-4y} - \frac{7y}{x-4y} = \frac{3x-x-y-7y}{x-4y} =$
 $\frac{2(x-4y)}{x-4y} = 2$.

8. 【解】因为 $\frac{x}{x^2-3x+1} = \frac{1}{3}$, 所以 $x \neq 0$, 所以
 $\frac{x^2-3x+1}{x} = 3$, 所以 $x + \frac{1}{x} - 3 = 3$, 所以 $x + \frac{1}{x} = 6$,
所以 $\frac{x^4-5x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 5 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7 = 36 -$
 $7 = 29$, 所以 $\frac{x^2}{x^4-5x^2+1} = \frac{1}{29}$.

课时 2 异分母分式的加减



刷基础

1. **B** 【解析】分式 $\frac{1}{2a^2b}$ 与 $\frac{1}{ab^2}$ 的公分母是 $2a^2b^2$,
故选 B.

2. $\frac{x(x-2)}{x^2-2x}$ 【解析】因为 $\frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{x(x-2)}$, 所以
分式 $\frac{1}{x^2-2x}$ 与 $\frac{1}{x}$ 的公分母是 $x(x-2)$. 故答案
为 $x(x-2)$.

3. **D** 【解析】原式 $= \frac{4}{x+2} + \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} =$
 $\frac{4+x^2-4}{x+2} = \frac{x^2}{x+2}$, 故选 D.

4. **B** 【解析】因为 $x > y > 1$, 所以 $y-x < 0, x-1 > 0$,
所以 $\frac{y-1}{x-1} - \frac{y}{x} = \frac{x(y-1)}{x(x-1)} - \frac{y(x-1)}{x(x-1)} = \frac{y-x}{x(x-1)} < 0$.
故选 B.

5. **B** 【解析】因为 $B = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} =$

$\frac{x-2-x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{-4}{x^2-4}$, 所以 A 和 B 互为相反数, 即 $A = -B$. 故选 B .

6. **【解析】** $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}$. 故答案为 $\frac{1}{x+2}$.

7. **【解】** (1) 原式 $= \frac{m-3}{m(m+3)} - \frac{m}{(m+3)^2} = \frac{(m-3)(m+3)}{m(m+3)^2} - \frac{m^2}{m(m+3)^2} = \frac{m^2-9-m^2}{m(m+3)^2} = \frac{-9}{m(m+3)^2}$.

(2) 原式 $= \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x+x^2+x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$.

8. **【解】** 由题意可知, 正常情况下汽车行驶的速度为 $\frac{x}{y}$ km/h, 如果晚出发 z h 并且按时到达单位, 那么速度应为 $\frac{x}{y-z}$ km/h, 所以 $\frac{x}{y-z} - \frac{x}{y} = \frac{xy-x(y-z)}{y(y-z)} = \frac{xz}{y^2-yz}$ (km/h).

答: 小强的爸爸每小时应该多行驶 $\frac{xz}{y^2-yz}$ km, 才能按时到达单位.

9. **【解】** $\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) \div \frac{a+b}{ab} = \frac{b^2-a^2}{ab} \times \frac{ab}{a+b} = \frac{(b-a)(b+a)}{ab} \times \frac{ab}{b+a} = b-a$. 当 $a = 2\ 023$, $b = 2\ 024$ 时, 原式 $= 2\ 024 - 2\ 023 = 1$.

10. **【解】** $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x+1}{x(x-1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$.

由 $x^2+x-3=0$ 可得 $x^2+x=3$, 所以原式 $= \frac{1}{3}$.

易错警示

注意所代入的数要使化简前后的分式的分母都不等于 0, 即分式要有意义.

关键点拨

把原式的第一项的分母分解因式后, 找出两分式的公分母, 通分后利用同分母分式的减法法则: 分式的分母不变, 把分子相减, 去括号后合并, 再约分即可得到结果.

刷易错

11. **【解】** $\left(m-2-\frac{2m-5}{m+2}\right) \div \frac{m^2-2m+1}{m^2-4} = \frac{(m-2)(m+2)-(2m-5)}{m+2} \div \frac{(m-1)^2}{(m-2)(m+2)} = \frac{m^2-2m+1}{m+2} \div \frac{(m-1)^2}{(m-2)(m+2)} = \frac{(m-1)^2}{m+2} \cdot \frac{(m-2)(m+2)}{(m-1)^2} = m-2$.

由题意得, $m \neq -2, 1, 2$, 所以当 $m=0$ 时, 原式 $= -2$ (m 的取值不唯一, 答案不唯一).

刷提升

1. **D** **【解析】** 因为 $a + \frac{1}{a} = \sqrt{10}$, 所以 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 10$, 所以 $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 = 10 - 4 = 6$, 所以 $a - \frac{1}{a} = \pm\sqrt{6}$, 所以 $\frac{a^2-1}{a} = a - \frac{1}{a} = \pm\sqrt{6}$, 故选 D .

2. **D** **【解析】** 因为 $M - N = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) = \frac{a-1}{a+1} + \frac{b-1}{b+1} = \frac{2ab-2}{(a+1)(b+1)} = \frac{2(ab-1)}{(a+1)(b+1)}$, 所以当 $ab=1$ 时, $M-N=0$, 即 $M=N$, 故①对; 因为 $M \cdot N = \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) = \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{a+b}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)^2}$, 所以当 $a+b=0$ 时, $M \cdot N = \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{b}{(b+1)^2} = \frac{a(b+1)^2+b(a+1)^2}{(a+1)^2(b+1)^2} = \frac{4ab}{(a+1)^2(b+1)^2}$. 因为 $a \neq -1, b \neq -1$, 所以 $(a+1)^2 \cdot (b+1)^2 > 0$. 因为 $a+b=0$, 所以 $a=-b$, 所以 $4ab = -4b^2 \leq 0$, 所以 $M \cdot N \leq 0$, 故②对. 故选 D .

3. **A** **【解析】** 因为 $a + \frac{1}{b} = 1$, 所以 $\frac{1}{a} = \frac{b}{b-1}$. 因为 $b + \frac{1}{c} = 1$, 所以 $c = \frac{1}{1-b}$, 所以 $\frac{1}{a} + c = \frac{b}{b-1} + \frac{1}{1-b} = \frac{b}{b-1} - \frac{1}{b-1} = \frac{b-1}{b-1} = 1$, 故选 A .

4. **16** **【解析】** 原式 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} + \cdots + \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+11} \right) \times (x+11) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+11} \right) \times (x+11) = \frac{1}{2} \times \frac{12}{(x-1)(x+11)} \times$

$(x+11) = \frac{6}{x-1}$. 因为式子的值为正整数,所以

$x-1=1$ 或 2 或 3 或 6, 则 $x=2$ 或 3 或 4 或 7,
 $2+3+4+7=16$. 故答案为 16.

5. $\frac{25}{4}$ 【解析】设 $m+n+p=x$, 则 $p=x-(m+n)$,

$n=x-(m+p)$, $m=x-(n+p)$, 所以等式 $\frac{p}{m+n} +$

$\frac{n}{m+p} + \frac{m}{n+p} = 2$ 可变形为 $\frac{x-(m+n)}{m+n} + \frac{x-(m+p)}{m+p} +$

$\frac{x-(n+p)}{n+p} = 2$, 所以 $\frac{x}{m+n} - 1 + \frac{x}{m+p} - 1 + \frac{x}{n+p} - 1 =$

2, 所以 $x \left(\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{n+p} \right) = 5$. 因为 $\frac{1}{m+n} +$

$\frac{1}{m+p} + \frac{1}{n+p} = \frac{4}{5}$, 所以 $x \times \frac{4}{5} = 5$, 所以 $x = \frac{25}{4}$, 即

$m+n+p = \frac{25}{4}$. 故答案为 $\frac{25}{4}$.

6. 【解】因为 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x+2)} +$

$\frac{Bx(x+2)}{x(x-1)(x+2)} + \frac{Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A(x^2+x-2)}{x(x-1)(x+2)} +$

$\frac{B(x^2+2x)}{x(x-1)(x+2)} + \frac{C(x^2-x)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{Ax^2+Ax-2A}{x(x-1)(x+2)} +$

$\frac{Bx^2+2Bx}{x(x-1)(x+2)} + \frac{Cx^2-Cx}{x(x-1)(x+2)} =$

$\frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A}{x(x-1)(x+2)} = \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}$,

$$\text{所以} \begin{cases} A+B+C=0, \\ A+2B-C=2, \\ -2A=3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} A=-\frac{3}{2}, \\ B=\frac{5}{3}, \\ C=-\frac{1}{6}. \end{cases}$$

刷素养

7. 【解】(1) 小滨的说法正确. 理由如下: 因为

$ab=1$, 所以 $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{ab}{ab+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{b}{b+1} + \frac{1}{1+b} =$

$\frac{b+1}{b+1} = 1$, 所以小滨的说法正确.

(2) (i) ① 因为 $ab=1$, 所以 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{a}{ab+a} +$

$\frac{b}{1+b} = \frac{1}{b+1} + \frac{b}{1+b} = \frac{1+b}{b+1} = 1$; ② $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} =$

$\frac{ab}{ab+a^2} + \frac{ab}{ab+b^2} = \frac{b}{b+a} + \frac{a}{a+b} = \frac{b+a}{b+a} = 1$; ③ 当 $a=b=$

思路分析

裂项求解可得

原式 $= \frac{6}{x-1}$, 由

式子的值为正

整数知 $x-1=$

1 或 2 或 3 或

6, 从而得出

答案.

关键点拨

此题考查了分

式的加减运算

法则与三元一

次方程组的解

法. 掌握整式

相等的条件是

解此题的

关键.

1 时, $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+4b^2} = \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+4 \times 1^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} =$

$\frac{7}{10}$, 当 $a=3, b=\frac{1}{3}$ 时, $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+4b^2} = \frac{1}{1+3^2} +$

$\frac{1}{1+4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{10} + \frac{9}{13} = \frac{103}{130}$, 所以 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+4b^2}$ 的

值不是定值; ④ $\frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+b^n} = \frac{1+b^n+1+a^n}{(1+a^n)(1+b^n)} =$

$\frac{2+b^n+a^n}{1+b^n+a^n+a^n b^n} = \frac{2+b^n+a^n}{1+b^n+a^n+1} = \frac{2+b^n+a^n}{2+b^n+a^n} = 1$, 所以

值始终保持不变的代数式是 ①②④. 满足题

意的代数式可以为 $\frac{2a}{1+a} + \frac{2b}{1+b}$, 证明如下: $\frac{2a}{1+a} +$

$\frac{2b}{1+b} = \frac{2a}{ab+a} + \frac{2b}{1+b} = \frac{2}{b+1} + \frac{2b}{1+b} = \frac{2+2b}{b+1} = 2$. 故答案

为 ①②④, $\frac{2a}{1+a} + \frac{2b}{1+b}$ (答案不唯一).

(ii) ①②④ 不存在, ③ 存在最小值. 由 (2) (i)

可知 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}, \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}, \frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+b^n}$ ($n \geq 3$,

n 为整数) 的值都是定值, 所以不存在最大值

或者最小值. $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+4b^2} = \frac{1+4b^2+1+a^2}{(1+a^2)(1+4b^2)} =$

$\frac{4b^2+a^2+2}{1+a^2+4b^2+4a^2b^2} = \frac{4b^2+a^2+2}{1+a^2+4b^2+4} = \frac{4b^2+a^2+2}{a^2+4b^2+5} =$

$1 - \frac{3}{a^2+4b^2+5}, a^2+4b^2+5 = a^2+4\left(\frac{1}{a}\right)^2+5 = a^2+$

$\frac{4}{a^2}+5 = \left(a^2+\frac{4}{a^2}-4\right)+9 = \left(a-\frac{2}{a}\right)^2+9$. 因为

$\left(a-\frac{2}{a}\right)^2 \geq 0$, 所以当 $a-\frac{2}{a}=0$ 时, a^2+4b^2+5 有

最小值, 最小值为 9, 所以 $\frac{3}{a^2+4b^2+5}$ 有最大值,

最大值为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, 所以 $1 - \frac{3}{a^2+4b^2+5}$ 有最小值,

最小值为 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. 因为 a^2+4b^2+5 无最大

值, 所以 $\frac{3}{a^2+4b^2+5}$ 无最小值, 即 $1 - \frac{3}{a^2+4b^2+5}$ 没

有最大值, 所以 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+4b^2}$ 有最小值 $\frac{2}{3}$, 没有

最大值.

重难专题3 分式的混合运算的常见方法

刷难关

1. 【解】(1) $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{5 \times 6 \times 7} =$
 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) + \cdots +$
 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5 \times 6} - \frac{1}{6 \times 7} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{6 \times 7} \right) = \frac{5}{21}.$
 故答案为 $\frac{5}{21}$.

(2) 由题意可得 $n(n+1) = \frac{1}{3} [n(n+1)(n+2) - n(n-1)(n+1)]$. 故答案为 $\frac{1}{3} [n(n+1)(n+2) - n(n-1)(n+1)]$.

(3) $A = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} (1 \times 2 \times 3 - 0 \times 1 \times 2) + \frac{1}{3} \times (2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3) + \frac{1}{3} \times (3 \times 4 \times 5 - 2 \times 3 \times 4) + \cdots + \frac{1}{3} [n(n+1)(n+2) - n(n-1)(n+1)] = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2),$

$B = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1},$ 所以 $A \cdot B = \frac{1}{3} n(n+2),$ 所以 $A \cdot B - C = \frac{1}{3} (n^2 - 2n) = \frac{1}{3} [(n-1)^2 - 1].$

因为 n 为正整数, 所以当 $n=1$ 时, $A \cdot B < C$; 当 $n=2$ 时, $A \cdot B = C$; 当 $n > 2$ 时, $A \cdot B > C$.

2. 【解】方法一: 因为 $x:y=2:3, y:z=1:2$, 所以 $y = \frac{3}{2}x, z = 2y = 3x$, 所以 $\frac{2x^2+3xy+5y^2}{x^2-2xz+z^2} =$

$$\frac{2x^2+3x \cdot \frac{3}{2}x+5 \times \frac{9}{4}x^2}{x^2-2x \cdot 3x+9x^2} = \frac{\frac{71}{4}x^2}{4x^2} = \frac{71}{16}.$$

方法二: 因为 $x:y=2:3, y:z=1:2=3:6$, 所以 $x:y:z=2:3:6$. 设 $x=2m$, 则 $y=3m, z=6m$, 所以 $\frac{2x^2+3xy+5y^2}{x^2-2xz+z^2} = \frac{2 \times 4m^2+3 \times 2m \times 3m+5 \times 9m^2}{4m^2-2 \times 2m \times 6m+36m^2} = \frac{71m^2}{16m^2} = \frac{71}{16}.$

3. B 【解析】 $\frac{6x+3}{2x-1} = \frac{6x-3+6}{2x-1} = 3 + \frac{6}{2x-1}$. 因为 x

关键点拨

如果分式的值是整数, 那么分母必为分子的约数.

关键点拨

把分式化为整式与分式的和的形式是解题的关键.

为整数, 分式 $\frac{6x+3}{2x-1}$ 的值是整数, 所以 $2x-1$ 为能被 6 整除的奇数, 所以 $2x-1=-1$ 时, $x=0$; $2x-1=1$ 时, $x=1$; $2x-1=-3$ 时, $x=-1$; $2x-1=3$ 时, $x=2$. 综上, 整数 x 的值有 0, 1, -1, 2, 共 4 个. 故选 B.

4. 4 【解析】 $\frac{2x}{2x+3} = \frac{2x+3-3}{2x+3} = 1 - \frac{3}{2x+3}$. 因为 x 为整数, $\frac{2x}{2x+3}$ 表示一个整数, 所以 $2x+3$ 的值为 $\pm 1, \pm 3$, 所以 x 的取值有 -1, -2, 0, -3, 共 4 个. 故答案为 4.

5. 【解】因为 n 为正整数, $\frac{3n^2+4n-7}{n+1} = \frac{(3n^2+3n)+(n+1)-8}{n+1} = 3n+1 - \frac{8}{n+1}$ 为整数, 所以 $\frac{8}{n+1}$ 为正整数, 所以 $n+1=2, 4, 8$, 所以 $n=1, 3, 7$.

5.5 分式方程

课时1 分式方程及其解法

刷基础

1. ③④⑤⑨ 【解析】根据分式方程的定义可知, ① $\frac{2}{3}x^2=1$ 不是分式方程; ② $\frac{2}{\pi}x^2=7$ 不是分式方程; ③ $\frac{2}{3x}=x$ 是分式方程; ④ $\frac{1}{x-2}+3=\frac{x-1}{x-2}$ 是分式方程; ⑤ $\frac{1}{x}=2$ 是分式方程; ⑥ $2x-3y=0$ 不是分式方程; ⑦ $\frac{x+1}{2}-3=\frac{2x}{7}$ 不是分式方程; ⑧ $\frac{x+1}{x-2}+3$ 不是方程; ⑨ $\frac{3}{x-2}=\frac{5}{x}$ 是分式方程. 故答案为 ③④⑤⑨.

2. 5 【解析】因为 $x=4$ 是关于 x 的分式方程 $\frac{2x-m}{x-3}=3$ 的解, 所以 $\frac{2 \times 4 - m}{4 - 3} = 3$, 所以 $m=5$. 故答案为 5.

3. -3 【解析】根据题意将 $x=b$ 代入 $\frac{a}{x-3}=\frac{1}{3}$, 得 $\frac{a}{b-3}=\frac{1}{3}$, 所以 $3a=b-3$. 将 $a=b+1$ 代入 $3a=b-3$, 得 $3(b+1)=b-3$, 解得 $b=-3$, 所以 $x=-3$. 故答案为 -3.

4. D 【解析】两边同乘 $(x-2)$, 得 $x-3(x-2)=$

a , 解得 $x = \frac{6-a}{2}$. 因为关于 x 的方程 $\frac{x}{x-2} - 3 = \frac{a}{x-2}$ 有正数解, 所以 $\frac{6-a}{2} > 0$, 且 $\frac{6-a}{2} \neq 2$, 解得 $a < 6$ 且 $a \neq 2$. 综上, a 的取值范围是 $a < 6$ 且 $a \neq 2$, 故选 D.

5. 【解】(1) $\frac{2}{x} + \frac{x}{x+1} = 1$, 方程两边同乘 $x(x+1)$, 得 $2(x+1) + x^2 = x(x+1)$, 解得 $x = -2$.
检验: 当 $x = -2$ 时, $x(x+1) \neq 0$, 所以 $x = -2$ 是原方程的根.

(2) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} = 1$, 方程两边同乘 (x^2-4) , 得 $(x-2)^2 - 16 = x^2 - 4$, 解得 $x = -2$.
检验: 当 $x = -2$ 时, $x^2 - 4 = 0$, 所以 $x = -2$ 不是原方程的根, 所以原方程无解.

6. D 【解析】方程两边同乘 $(x-3)$, 得 $x-3a = 3a(x-3)$. 由分式方程有增根, 得 $x-3=0$, 即 $x=3$. 把 $x=3$ 代入 $x-3a=3a(x-3)$, 得 $3-3a=0$, 解得 $a=1$. 故选 D.

7. 2 或 $\frac{2}{3}$ 【解析】分式方程两边同乘 $(x-3)$, 得 $2x-6+1-kx = -1$. 移项、合并同类项, 得 $(2-k)x = 4$. 当整式方程无解时, $2-k=0$, 解得 $k=2$; 当分式方程有增根时, $x-3=0$, 解得 $x=3$, 将 $x=3$ 代入 $(2-k)x=4$, 得 $3(2-k)=4$, 解得 $k=\frac{2}{3}$. 综上, $k=2$ 或 $\frac{2}{3}$. 故答案为 2 或 $\frac{2}{3}$.

刷易错

8. -5 或 $\frac{5}{3}$ 或 -1 【解析】 $\frac{2}{x-2} + \frac{mx}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$, 去分母, 得 $2(x+3) + mx = x-2$, 去括号, 得 $2x+6+mx = x-2$, 移项、合并同类项, 得 $(m+1)x = -8$. 当 $m+1=0$, 即 $m=-1$ 时, 方程 $(m+1)x = -8$ 无解; 当 $m+1 \neq 0$ 时, 因为原方程无解, 所以原方程有增根, 所以 $x-2=0$ 或 $x+3=0$, 所以 $x=2$ 或 $x=-3$, 所以 $2(m+1) = -8$ 或 $-3(m+1) = -8$, 解得 $m=-5$ 或 $m=\frac{5}{3}$. 综上所述, m 的值为 -5 或 $\frac{5}{3}$ 或 -1. 故答案为 -5 或 $\frac{5}{3}$ 或 -1.

9. 【解】小丁和小迪的解法都错误, 应在两个框内打“×”.

易错警示

一定要注意解分式方程必须检验. 分式方程的每一项都要乘公分母, 常数项不要漏乘, 乘公分母后要注意分子是否需要变号.

正确步骤如下:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x-3}{2-x} = 1,$$

两边同乘 $(x-2)$, 得 $x+x-3=x-2$.

移项、合并同类项, 得 $x=1$.

检验: 将 $x=1$ 代入 $x-2$ 中可得 $1-2=-1 \neq 0$, 故原分式方程的解是 $x=1$.



刷提升

1. B 【解析】 $\frac{m}{x+6} = 1$, 去分母, 得 $m = x+6$, 解得 $x = m-6$. 要使分式方程有解, 则 $x+6 \neq 0$, 所以 $m \neq 0$, 所以当 $m < 4$ 时, $m-6 < -2$, 所以 $x < -2$, 所以当 $m < 4$ 且 $m \neq 0$ 时, 方程的解是负数, 故甲说法错误; 当 $m > 6$ 时, $m-6 > 0$, 所以 $x > 0$, 所以乙说法正确. 故选 B.

2. A 【解析】

$$\text{类比 } x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}.$$

↓

$$(x+1) + \frac{1}{x+1} = (a+1) + \frac{1}{a+1}.$$

↓

$$x+1 = a+1 \text{ 或 } x+1 = \frac{1}{a+1}.$$

↓

$$x = a \text{ 或 } x = \frac{1}{a+1} - 1 = -\frac{a}{a+1}.$$

3. ①② 【解析】①因为 $a * b = \frac{ab}{a+b}$, 所以 $a * a =$

$$\frac{a \cdot a}{a+a} = \frac{a \cdot a}{2a} = \frac{a}{2}, \text{ 故①正确. ②由 } 2 * x = 1, \text{ 得}$$

$$\frac{2x}{2+x} = 1, \text{ 去分母, 得 } 2x = 2+x, \text{ 解得 } x=2, \text{ 经检验, } x=2 \text{ 是分式方程的解, 所以分式方程的解为 } x=2, \text{ 故②正确. ③由 } (x+1) * (x-1) = 0,$$

$$\text{得 } \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)+(x-1)} = 0, \text{ 所以 } (x+1)(x-1) = 0,$$

$2x \neq 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 1$, 故③不正确. 故正确的结论是①②. 故答案为①②.

4. 8 【解析】因为 $\frac{2}{1-x} + \frac{2}{1+x} + \frac{4}{1+x^2} + \frac{8}{1+x^4} + \frac{16}{1+x^8} +$

$$\frac{32}{1+x^{16}} = \frac{4}{1-x^2} + \frac{4}{1+x^2} + \frac{8}{1+x^4} + \frac{16}{1+x^8} + \frac{32}{1+x^{16}} =$$

$$\frac{64}{1-x^{32}}, \text{ 所以 } \frac{8a}{1-x^{32}} = \frac{64}{1-x^{32}}, \text{ 两边同乘 } (1-x^{32}), \text{ 得}$$

$$8a = 64, \text{ 解得 } a = 8.$$

5. 【解】方程两边同乘 $(x+2)(x-1)$,

得 $2(x+2)+mx=x-1$,

移项、合并同类项,得 $(m+1)x=-5$.

(1)因为 $x=1$ 是原分式方程的增根,

所以 $1+m=-5$,解得 $m=-6$.

(2)因为原分式方程有增根,

所以 $x+2=0$ 或 $x-1=0$,所以 $x=-2$ 或 $x=1$.

当 $x=-2$ 时, $m=1.5$;

当 $x=1$ 时, $m=-6$.

综上, m 的值为 1.5 或 -6 .

(3)当 $m+1=0$ 时,该方程无解,此时 $m=-1$;

当 $m+1 \neq 0$ 时,要使原方程无解,由(2)得 $m=-6$ 或 $m=1.5$.

综上, m 的值为 -1 或 -6 或 1.5 .

刷素养

6. 【解】(1) $x+\frac{6}{x}=-5$ 可化为 $x+\frac{(-2) \times (-3)}{x}=$

$(-2)+(-3)$,且 $x_1 > x_2$,所以 $x_1=-2, x_2=-3$,故答案为 $-2, -3$.

(2)由已知得 $mn=-5, m+n=-2$,

所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{2}{5}$.

(3)原方程变为 $x-2-\frac{2k^2+3k}{x-2}=-k-3$,

所以 $x-2+\frac{k(-2k-3)}{x-2}=k+(-2k-3)$.

因为 $k>0, x_1 > x_2$,所以 $x_1-2=k, x_2-2=-2k-3$,

所以 $\frac{x_1-2}{x_2+1}=\frac{k}{-2k}=-\frac{1}{2}$.

课时2 分式方程的应用

刷基础

1. B 【解析】由小溪每小时骑行 x km,所列方

程为 $\frac{18}{x+3}+\frac{3}{10}=\frac{18}{x}$,可知小慈每小时比小溪多

骑行3 km,即小慈每分钟比小溪多骑行50 m,故选B.

2. 7.5 【解析】设乙车上的乘客看见甲车在他

窗口外经过的时间是 x 秒.由题意,得 $\frac{200}{10}=$

$\frac{150}{x}$,解得 $x=7.5$.经检验, $x=7.5$ 是原方程的

根,所以乙车上的乘客看见甲车在他窗口外经过的时间是7.5秒.故答案为7.5.

3. 【解】设甲的速度为 a km/h,乙的速度为 b km/h.

关键点拨

本题考查由分式方程推出实际问题的条件,“小慈比小溪先到18分钟”可说明小慈比小溪骑行的速度快,再分析方程可得结果.

关键点拨

由 $S_{\text{圆}}=\pi r^2$ 可知,大水管截面面积是小水管截面面积的4倍,故大水管注水速度是小水管注水速度的4倍.

$$\text{根据题意,得} \begin{cases} \frac{10-2}{a} = \frac{8-2}{b}, \\ \frac{10}{a} = \frac{8}{b} - \frac{5}{60}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=8, \\ b=6. \end{cases}$$

经检验, $a=8, b=6$ 是原方程组的根.

答:甲的速度为8 km/h.

4. D 【解析】由题意得 $\frac{400}{x} - \frac{400}{x+10} = 2$. 故选D.

5. 30 【解析】设原计划完成这项工程需要 x 个月,则提高工作效率后完成这项工程需要 $(x-6)$ 个月.根据题意得 $\frac{1}{x}(1+25\%) = \frac{1}{x-6}$,解得

$x=30$.经检验, $x=30$ 是原方程的解,且符合题意,所以原计划完成这项工程需要30个月.故答案为30.

6. 50 【解析】设该款耳机的进价为 x 元,则售价为 $[(1+30\%)x-10]$ 元.依题意可得 $\frac{(1+30\%)x-10-x}{(1+30\%)x-10} \times 100\% = 20\%$,解得 $x=200$.

经检验, $x=200$ 是原分式方程的解,所以 $(1+30\%)x-10-x=(1+30\%) \times 200-10-200=50$,故答案为50.

7. 【解】(1)由题意,得 $\begin{cases} x+y=50-20, \\ y=2x, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x=10, \\ y=20, \end{cases}$ 故 x, y 的值分别为10, 20.

(2)降价后的单价为 $\frac{35 \times 10 + 30 \times 20 + 25 \times 20}{50} -$

$2=27$ (元/千克),可知需加入丙种糖.设加入丙种糖 z 千克.由题意,得 $\frac{35 \times 10 + 30 \times 20 + 25(20+z)}{50+z} = 27$,解得 $z=50$.

答:需加入丙种糖50千克.

刷提升

1. 60 【解析】设前1 h大巴车的行驶速度为 x km/h,则1 h后的行驶速度为 $1.5x$ km/h.

依题意,得 $\frac{180}{x} - \left(1 + \frac{180-x}{1.5x}\right) = \frac{40}{60}$,解得 $x=60$.

经检验, $x=60$ 是原方程的解,且符合题意,所以前1 h大巴车的行驶速度为60 km/h.故答案为60.

2. $\frac{v}{4}$ 【解析】因为大水管口径是小水管的2倍,所以大水管注水速度是小水管的4倍.设小水管注水的速度是 x 立方米/分,则大水管

注水的速度是 $4x$ 立方米/分. 根据题意得 $\frac{v}{2x} + \frac{v}{8x} = 10$, 解得 $x = \frac{v}{16}$. 经检验, $x = \frac{v}{16}$ 是原方程的解, 且符合题意, 所以 $4x = 4 \times \frac{v}{16} = \frac{v}{4}$, 所以大水管注水的速度为 $\frac{v}{4}$ 立方米/分. 故答案为 $\frac{v}{4}$.

3. 【解】设 A、B 两地的距离为 x 千米. 若每分钟行驶 a 千米, 则从 A 地驶向 B 地共需 $\frac{x}{a}$ 分钟; 若每分钟行驶 $\frac{2}{3}a$ 千米, 则从 A 地驶向 B 地, 距离 B 地还有 10 千米时共需 $\frac{x-10}{\frac{2}{3}a}$ 分钟. 根据题意可得, $\frac{x}{a} = \frac{x-10}{\frac{2}{3}a} - 20$. 同理可得 $\frac{x}{\frac{3}{4}a} = \frac{x+30}{\frac{3}{4}a} - 20$, 所以 $\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{x-10}{\frac{2}{3}a} - 20, \\ \frac{x}{\frac{3}{4}a} = \frac{x+30}{\frac{3}{4}a} - 20, \end{cases}$ 整理得 $\begin{cases} 2x = 3x - 30 - 40a, \\ 4x = 3x + 90 - 60a, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \frac{3}{5}, \\ x = 54. \end{cases}$ 经检验, $\begin{cases} a = \frac{3}{5}, \\ x = 54 \end{cases}$ 是原方程组的解.

答: A、B 两地的距离为 54 千米.

4. 【解】(1) 设 B 款手机的进货单价是 x 元/部, 则 A 款手机的进货单价是 $(x+800)$ 元/部. 根据题意得 $\frac{38\,400}{x+800} = \frac{28\,800}{x}$, 解得 $x = 2\,400$. 经检验, $x = 2\,400$ 是原方程的根, 且符合题意, 则 $x+800 = 2\,400+800 = 3\,200$. 答: A 款手机的进货单价是 3 200 元/部, B 款手机的进货单价是 2 400 元/部.

(2) 设 A 款手机的销售单价是 a 元/部, B 款手机的销售单价是 b 元/部. 根据题意得 $\begin{cases} 5a+8b=40\,100, \\ 6a+7b=41\,100, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3\,700, \\ b=2\,700. \end{cases}$

思路分析

(1) 设 B 款手机的进货单价是 x 元/部, 则 A 款手机的进货单价是 $(x+800)$ 元/部. 由题意: 花 38 400 元购进 A 款手机的数量与花 28 800 元购进 B 款手机的数量相同, 列出分式方程, 求解即可.

(2) 设 A 款手机的销售单价是 a 元/部, B 款手机的销售单价是 b 元/部. 根据表中的数据列方程组求解即可.

(3) 设购进 A 款手机 m 部, B 款手机 n 部. 由题意: 手机专卖店要花费 28 000 元购进 A、B 两款手机若干部, 列出二元一次方程, 求其正整数解, 得到进货方案, 再分别求出总利润, 比较即可.

答: A 款手机的销售单价是 3 700 元/部, B 款手机的销售单价是 2 700 元/部.

(3) 设购进 A 款手机 m 部, B 款手机 n 部. 根据题意, 得 $3\,200m + 2\,400n = 28\,000$, 化简得 $4m + 3n = 35$. 因为 m, n 都是正整数, 所以 $\begin{cases} m=2, \\ n=9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=5, \\ n=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=8, \\ n=1 \end{cases}$, 所以共有三种进货方案.

方案一: 购进 A 款手机 2 部, B 款手机 9 部, 利润是 $(3\,700 - 3\,200) \times 2 + (2\,700 - 2\,400) \times 9 = 3\,700$ (元);

方案二: 购进 A 款手机 5 部, B 款手机 5 部, 利润是 $(3\,700 - 3\,200) \times 5 + (2\,700 - 2\,400) \times 5 = 4\,000$ (元);

方案三: 购进 A 款手机 8 部, B 款手机 1 部, 利润是 $(3\,700 - 3\,200) \times 8 + (2\,700 - 2\,400) \times 1 = 4\,300$ (元).

因为 $3\,700 < 4\,000 < 4\,300$, 所以购进 A 款手机 8 部, B 款手机 1 部, 获得的总利润最高.

刷素养

5. 【解】(1) 设扶梯露在外面的部分有 x 级, 乙每分钟走动的级数为 a , 则甲每分钟走动的级数为 $2a$, 扶梯每分钟向上运动 b 级. 由题意得 $\begin{cases} \frac{24}{2a} = \frac{x}{2a+b}, & \text{①} \\ \frac{16}{a} = \frac{x}{a+b}, & \text{②} \end{cases}$ ① \div ②得 $\frac{3}{4} = \frac{a+b}{2a+b}$, 整理得 $b = 2a$, 代入②得 $x = 48$.

答: 扶梯露在外面的部分有 48 级.

(2) 设追上乙时, 甲走扶梯 m 遍, 走楼梯 n 遍, 则乙走扶梯 $(m-1)$ 遍, 走楼梯 $(n-1)$ 遍. 由题意得 $\frac{48m}{4a} + \frac{48n}{2a} = \frac{48(m-1)}{3a} + \frac{48(n-1)}{a}$, 整理得 $m + 6n = 16$, 这里 m, n 中必有一个是正整数, 且 $0 \leq m - n \leq 1$. ①若 m 为正整数, 则 $n = \frac{16-m}{6}$, 所以 $\begin{cases} m=1, \\ n=\frac{5}{2} \end{cases}$ (舍去), $\begin{cases} m=2, \\ n=\frac{7}{3} \end{cases}$ (舍去), $\begin{cases} m=3, \\ n=\frac{13}{6} \end{cases}$ (不符合条件), $\begin{cases} m=4, \\ n=2 \end{cases}$ (舍去),

$$\begin{cases} m=5, \\ n=\frac{11}{6}, \end{cases} \cdots (\text{不合题意,舍去}); \textcircled{2} \text{若 } n \text{ 为正整}$$

数, 则 $m = 16 - 6n$, 所以 $\begin{cases} n=1, \\ m=10, \end{cases} \begin{cases} n=2, \\ m=4, \end{cases}$

$\begin{cases} n=3, \\ m=-2, \end{cases} \cdots$, 这些均不符合要求. 综上,

$$\begin{cases} m=3, \\ n=\frac{13}{6}, \end{cases} \text{此时, 甲在楼梯上. 他已经走动的级}$$

数是 $\left(\frac{48m}{4a} + \frac{48n}{2a}\right) \times 2a = 24m + 48n = 72 + 104 = 176$.

答: 甲第 1 次追上乙时是在楼梯上, 他已经走动的级数是 176.

重难专题 4 有关解分式方程的问题

刷难关

1. C 【解析】把分式方程去分母得 $3x-1-m=x+1$, 解得 $x = \frac{m+2}{2}$. 因为分式方程有增根, 所以

$x = -1$. 把 $x = -1$ 代入 $x = \frac{m+2}{2}$, 得 $-1 = \frac{m+2}{2}$, 解得 $m = -4$, 故选 C.

2. 3 或 4 【解析】因为 $a(x \star x) = \frac{ax}{3x-9}$, $(x \star$

$12) + 1 = \frac{12}{3x-9} + 1$, $a(x \star x) = (x \star 12) + 1$, 所以

$\frac{ax}{3x-9} = \frac{12}{3x-9} + 1$, 所以 $ax = 12 + 3x - 9$, 所以 $(a -$

$3)x = 3$. 当 $a - 3 = 0$, 即 $a = 3$ 时, 方程无解; 当 $a \neq 3$ 时, 要使原方程无解, 则 $3x - 9 = 0$, 所以 $x = 3$, 所以 $3(a - 3) = 3$, 解得 $a = 4$. 综上, a 的值为 3 或 4. 故答案为 3 或 4.

3. 【解】(1) 把 $a = 2, b = 1$ 代入方程得 $\frac{2}{2x+3} -$

$\frac{1-x}{x-5} = 1$, 去分母得 $2(x-5) - (2x+3)(1-x) =$

$(2x+3)(x-5)$, 整理得 $2x - 10 + 2x^2 + x - 3 = 2x^2 -$

$7x - 15$, 移项、合并同类项得 $10x = -2$, 解得

$x = -\frac{1}{5}$. 检验: 当 $x = -\frac{1}{5}$ 时, $(2x+3)(x-5) \neq$

0, 所以原分式方程的解为 $x = -\frac{1}{5}$.

(2) 把 $a = 1$ 代入方程得 $\frac{1}{2x+3} - \frac{b-x}{x-5} = 1$,

关键点拨

(2) 若分式方程无解, 则需要对化简后的整式方程进行讨论, 可能是整式方程无解, 也可能是整式方程的解是原分式方程的增根.

关键点拨

通过将分式变形从而化简分式方程是解本题的关键.

去分母得 $x-5-(b-x)(2x+3) = (2x+3)(x-5)$, 整理得 $x-5+2x^2+(3-2b)x-3b = 2x^2-7x-15$, 移项、合并同类项得 $(11-2b)x = 3b-10$.

因为分式方程无解, 所以 $(2x+3)(x-5) = 0$,

即 $x = -\frac{3}{2}$ 或 $x = 5$, 或 $11-2b = 0$.

当 $x = -\frac{3}{2}$ 时, $-\frac{3}{2}(11-2b) = 3b-10$, 此时 b 无

解; 当 $x = 5$ 时, $5(11-2b) = 3b-10$, 此时 $b = 5$;

当 $11-2b = 0$ 时, $b = \frac{11}{2}$.

综上, b 的值为 5 或 $\frac{11}{2}$ 时分式方程无解.

(3) 把 $a = 3b$ 代入方程得 $\frac{3b}{2x+3} - \frac{b-x}{x-5} = 1$,

去分母得 $3b(x-5) - (2x+3)(b-x) = (2x+3)(x-5)$, 整理得 $3bx - 15b + 2x^2 + (3-2b)x - 3b = 2x^2 - 7x - 15$, 即 $(b+10)x = 18b-15$, 解得

$x = \frac{18b-15}{b+10} = \frac{18(b+10)-195}{b+10} = 18 - \frac{195}{b+10}$. 因为

b 为正整数, x 为整数, 所以 $10+b$ 必为 195 的因数, 且 $10+b \geq 11$. 因为 $195 = 3 \times 5 \times 13$, 所以 195 的因数有 1, 3, 5, 13, 15, 39, 65, 195, 但 1, 3, 5 小于 11, 不合题意, 故 $10+b$ 可以取 13, 15, 39, 65, 195 这五个数, 所以方程的解 x 为 3, 5, 13, 15, 17. 由于 $x = 5$ 为分式方程的增根, 应舍去, 所以 b 只可以取 3, 29, 55, 185, 所以满足条件的 b 的值为 3, 29, 55, 185.

4. 【解】原方程可变形为 $1 - \frac{1}{x+4} - 1 + \frac{1}{x+5} = 1 -$

$\frac{1}{x+2} - 1 + \frac{1}{x+3}$, 所以 $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$, 即

$\frac{1}{(x+4)(x+5)} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$.

方程的两边同乘 $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$,

得 $(x+2)(x+3) = (x+4)(x+5)$, 解得 $x = -\frac{7}{2}$.

检验: 当 $x = -\frac{7}{2}$ 时, $(x+2)(x+3)(x+4)(x+$

$5) \neq 0$, 所以原方程的解为 $x = -\frac{7}{2}$.

5. 【解】因为 $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$,

$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}, \cdots$,

$\frac{1}{(x+9)(x+10)} = \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10}$,

所以原方程可化为 $\frac{1}{x+10} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \cdots + \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10} = \frac{2}{5}$, 即 $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{5}$, 解得 $x = \frac{3}{2}$. 经检验, $x = \frac{3}{2}$ 是原方程的根.

6. 【解】原方程可化为 $\left(5 - \frac{1}{x-19}\right) + \left(1 + \frac{1}{x-9}\right) = \left(4 + \frac{5}{x-6}\right) + \left(2 - \frac{5}{x-8}\right)$, 即 $\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-19} = \frac{5}{x-6} - \frac{5}{x-8}$, 所以 $\frac{-10}{(x-9)(x-19)} = \frac{-10}{(x-6)(x-8)}$, 所以 $(x-6)(x-8) = (x-9)(x-19)$, 即 $14x = 123$, 所以 $x = \frac{123}{14}$. 经检验, $x = \frac{123}{14}$ 是原方程的根.

项目化学习 2 销售方案问题

刷难关

【解】(1) 设每杯“芝士杨梅”的售价为 x 元, 每杯“满杯杨梅”的售价为 y 元.

由题意得 $\begin{cases} x-y=2, \\ x+2y=53, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=19, \\ y=17. \end{cases}$

答: 每杯“芝士杨梅”的售价为 19 元, 每杯“满杯杨梅”的售价为 17 元.

(2) 设每杯“满杯杨梅”的成本为 a 元, 则每杯“满杯杨梅”的利润为 $(17-a)$ 元, 每杯“芝士杨梅”的利润为 $\frac{5}{4}(17-a)$ 元. 由题意得 $\frac{400}{5} + \frac{5}{4}(17-a)$

$20 = \frac{480}{17-a}$, 解得 $a = 9$. 经检验, $a = 9$ 是原分式方程的解, 且满足题意, 所以每杯“芝士杨梅”的成本为 $19 - \frac{5}{4} \times (17-9) = 9$ (元).

答: 每杯“芝士杨梅”和每杯“满杯杨梅”的成本均为 9 元.

(3) 设制作 m 杯“芝士杨梅”和 n 杯“满杯杨梅”. 由题意得 $400m + 500n = 17\ 500$, 变形得 $n = 35 - \frac{4m}{5}$. 因为芝士消耗量不少于 3 500 mL, m, n 都是正整数, 所以 $m \geq 3\ 500 \div 100 = 35$, 且 m 是 5

的倍数, 所以 $\begin{cases} m=35, \\ n=7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=40, \\ n=3. \end{cases}$

因为“芝士杨梅”每杯降价 4 元, 即每杯利润为 6 元, “满杯杨梅”每杯利润为 8 元, 所以当

$\begin{cases} m=35, \\ n=7 \end{cases}$ 时, 总利润为 $35 \times 6 + 7 \times 8 = 266$ (元);

思路分析

若直接通分去分母, 则使问题复杂化, 可以先拆分、然后分组运算, 化简后再解分式方程.

思路分析

先把分式进行通分, 再根据同分母分式加法法则进行计算, 最后约分即可.

当 $\begin{cases} m=40, \\ n=3 \end{cases}$ 时, 总利润为 $40 \times 6 + 3 \times 8 = 264$ (元).

因为 $266 > 264$, 所以为了使这两种水果茶总获利最大, 需制作“芝士杨梅”和“满杯杨梅”共 $35 + 7 = 42$ (杯).

全章综合训练



刷中考

1. A 【解析】由分式 $\frac{x-2}{x+3}$ 的值为 0 可得 $x-2=0$

且 $x+3 \neq 0$, 所以 $x=2$. 故选 A.

2. $x \neq 1$ 【解析】要使分式 $\frac{1}{x-1}$ 有意义, 则 $x-1 \neq 0$, 解得 $x \neq 1$. 故答案为 $x \neq 1$.

3. A 【解析】 $\frac{2}{a^2-1} + \frac{1}{a+1} = \frac{2}{(a+1)(a-1)} + \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1}$, 故选 A.

4. B 【解析】 $\frac{a^2+12a+36}{a^2+6a} = \frac{(a+6)^2}{a(a+6)} = \frac{a+6}{a}$. 当 $a=-3$ 时, 原式 $= \frac{-3+6}{-3} = -1$. 故选 B.

5. 【解】因为 $a+b-3=0$, 所以 $a+b=3$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{4a-4b+8b}{(a+b)^2} \\ &= \frac{4(a+b)}{(a+b)^2} \\ &= \frac{4}{a+b} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

6. 【解】原式 $= \frac{2+x-1}{x-1} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$
 $= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$
 $= \frac{x}{x+1}$.

当 $x=-2$ 时, 原式 $= \frac{-2}{-2+1} = 2$.

7. 2 【解析】 $\frac{3}{x+1} = \frac{5}{x+3}$, 去分母, 得 $3(x+3) = 5(x+1)$, 解得 $x=2$. 经检验, $x=2$ 是原方程的解. 故答案为 2.

8. 【解】去分母, 得 $3(x-1) - (x+1) = 0$, 去括号、合并同类项, 得 $2x-4=0$,

解得 $x=2$.

检验:当 $x=2$ 时, $(x+1)(x-1) \neq 0$,

所以 $x=2$ 是原方程的解.

9. $\frac{6\,000}{x+50} = \frac{1\,000}{x}$ 【解析】已知纯电汽车每百公里的耗电费为 x 元,则燃油汽车每百公里的耗油费为 $(x+50)$ 元. 由题意得 $\frac{6\,000}{x+50} = \frac{1\,000}{x}$, 故答案为 $\frac{6\,000}{x+50} = \frac{1\,000}{x}$.

10. 【解】(1) 设该厂每天生产甲种文创产品的数量是 x 个,则每天生产乙种文创产品的数量是 $(x-50)$ 个.

根据题意得 $3x-4(x-50)=100$,

解得 $x=100$,

所以 $x-50=100-50=50$.

答:该厂每天生产甲种文创产品的数量是 100 个,每天生产乙种文创产品的数量是 50 个.

(2) 设每天生产的乙种文创产品增加的数量是 y 个,则每天生产的甲种文创产品增加的数量是 $2y$ 个.

根据题意得 $\frac{1\,400}{50+y} - \frac{1\,400}{100+2y} = 10$,

解得 $y=20$,

经检验, $y=20$ 是所列方程的解,且符合题意.

答:每天生产的乙种文创产品增加的数量是 20 个.

思路分析

(2) 设每天生产的乙种文创产品增加的数量是 y 个,则每天生产的甲种文创产品增加的数量是 $2y$ 个. 利用工作时间=工作总量÷工作效率,结合“生产甲、乙两种文创产品各 1 400 个,乙比甲多用 10 天”可列出关于 y 的分式方程,解方程并检验后,即可得出结论.

关键点拨

解题的关键是对所求的式子进行转化,使其变为含有已知条件的形式.

C 选项,当 $A=3x+2y$ 时, $\frac{3 \cdot 3x+2 \cdot 3y}{9(2x^2+y^2)} = \frac{3x+2y}{3(2x^2+y^2)}$,分式的值改变. D 选项,当 $A=2xy$ 时, $\frac{2 \cdot 3x \cdot 3y}{9(2x^2+y^2)} = \frac{2xy}{2x^2+y^2}$,分式的值不变. 故选 D.

4. B 【解析】因为每辆大货车的货运量是 x 吨,所以每辆小货车的货运量是 $(x-5)$ 吨. 依题意得 $\frac{75}{x} = \frac{50}{x-5}$. 故选 B.

5. A 【解析】因为当 $x=1$ 时,分式无意义,所以分式的分母可能是 $x-1$. 因为当 $x=-2$ 时,分式的值为 0,所以分式的分子可能是 $x+2$,所以分式可能是 $\frac{x+2}{x-1}$,故选 A.

6. A 【解析】把 $x=0$ 代入方程,得 $\frac{3}{a} = \frac{3}{4}$. 去分母,得 $12=3a$,解得 $a=4$. 经检验, $a=4$ 是方程 $\frac{3}{a} = \frac{3}{4}$ 的解,所以 $a=4$. 故选 A.

7. D 【解析】方程两边都乘 $x(x+1)(x-1)$,得 $x(k-1)-(x+1)=(k-5)(x-1)$. 因为增根为 $x=-1$,所以 $1-k=(k-5) \times (-2)$,所以 $k=9$. 故选 D.

8. D 【解析】因为 $k = \frac{m+3n}{m} = 1 + \frac{3n}{m}$,且 $k = \frac{m}{n}$,所以 $k = 1 + \frac{3n}{m} = 1 + \frac{3}{k}$,所以 $k^2 = k+3$,故选 D.

9. B 【解析】当 $\frac{1}{x} > \frac{2}{x}$,即 $x < 0$ 时,方程为 $\frac{1}{x} = 1 - \frac{3}{x}$,去分母得 $1=x-3$,解得 $x=4$ (舍去);当 $\frac{1}{x} < \frac{2}{x}$,即 $x > 0$ 时,方程为 $\frac{2}{x} = 1 - \frac{3}{x}$,去分母得 $2=x-3$,解得 $x=5$. 经检验, $x=5$ 是原分式方程的根. 故选 B.

10. D 【解析】当 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 5$ 时, $\frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{1}{\frac{ab+bc+ca}{abc}} = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}} = \frac{2}{3+4+5} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. 故选 D.

刷章测

1. B 【解析】 $\frac{-xy^2}{(2xy)^2} = \frac{-xy^2}{4x^2y^2} = -\frac{1}{4x}$, 故选 B.
2. A 【解析】原式 $= \frac{m}{m+2} + \frac{6}{m^2-4} \cdot \frac{m-2}{3} = \frac{m}{m+2} + \frac{6}{(m+2)(m-2)} \cdot \frac{m-2}{3} = \frac{m}{m+2} + \frac{2}{m+2} = \frac{m+2}{m+2} = 1$, 故选 A.
3. D 【解析】原分式为 $\frac{A}{2x^2+y^2}$,当 x 和 y 都扩大为原来的 3 倍时,分母变为 $2(3x)^2 + (3y)^2 = 9(2x^2+y^2)$. A 选项,当 $A=3$ 时, $\frac{3}{9(2x^2+y^2)} = \frac{1}{3(2x^2+y^2)}$,分式的值改变. B 选项,当 $A=3x^2+3$ 时, $\frac{3(3x)^2+3}{9(2x^2+y^2)} = \frac{9x^2+1}{3(2x^2+y^2)}$,分式的值改变.

11. $x \neq 20$ 【解析】若分式 $\frac{6}{x-20}$ 有意义, 则 $x-20 \neq 0$, 所以 $x \neq 20$, 故答案为 $x \neq 20$.

12. 5 2 【解析】因为 $\frac{3x+7}{(x+4)(x+3)} = \frac{A}{x+4} - \frac{B}{x+3}$, 所以 $\frac{3x+7}{(x+4)(x+3)} = \frac{A(x+3)-B(x+4)}{(x+4)(x+3)}$, 所以 $3x+7 = A(x+3)-B(x+4)$, 即 $3x+7 = (A-B)x + (3A-4B)$, 所以 $\begin{cases} A-B=3, \\ 3A-4B=7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=5, \\ B=2. \end{cases}$

13. 2 【解析】 $\frac{1\ 001+n}{3+n} = \frac{(3+n)+998}{3+n} = 1 + \frac{998}{3+n}$. 因为 $\frac{1\ 001+n}{3+n}$ 为整数, n 为正整数, 所以 $3+n$ 为 998 的因数. 因为 $998 = 1 \times 998 = 2 \times 499$, 所以 $n+3 = 499$ 或 998 , 所以 $n = 496$ 或 995 , 所以符合题意的正整数 n 共有 2 个. 故答案为 2.

14. $y^2 - y - 3 = 0$ 【解析】 $\frac{x-2}{x} = y$, 则原分式方程可化为 $y - \frac{3}{y} = 1$, 整理得 $y^2 - y - 3 = 0$. 故答案为 $y^2 - y - 3 = 0$.

15. $\frac{1}{3}$ 或 0 【解析】 $\frac{1}{x+1} = \frac{3k}{x}$, 方程两边同乘 $x(x+1)$, 得 $x = 3k(x+1)$, 整理得 $(1-3k)x = 3k$. 分两种情况: ①当 $1-3k=0$ 时, $k = \frac{1}{3}$, 此时整式方程无解. ②当 $x(x+1)=0$ 时, $x=0$ 或 -1 . 把 $x=0$ 代入 $(1-3k)x = 3k$ 中, 得 $0 = 3k$, 所以 $k=0$; 把 $x=-1$ 代入 $(1-3k)x = 3k$ 中, 得 $3k-1 = 3k$, 则 k 的值不存在. 综上所述, k 的值为 $\frac{1}{3}$ 或 0. 故答案为 $\frac{1}{3}$ 或 0.

16. $\frac{1}{2-x}$ 【解析】因为 $a_1 = x-1 (x \neq 1, x \neq 2)$, 所以 $a_2 = \frac{1}{1-a_1} = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{1-x+1} = \frac{1}{2-x}$, $a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2-x}} = \frac{2-x}{1-x}$, $a_4 = \frac{1}{1-a_3} = \frac{1}{1-\frac{2-x}{1-x}} = x-1, \dots$, 所以三个式子为一个循环. 因为 $2\ 024 \div 3 = 674 \dots 2$, 则 $a_{2\ 024} = \frac{1}{2-x}$, 故答案

为 $\frac{1}{2-x}$.

17. 【解】(1) $\frac{x}{2x-3} + \frac{5}{3-2x} = 4$, 方程的两边同乘 $(2x-3)$, 得 $x-5 = 4(2x-3)$, 解得 $x=1$. 检验: 当 $x=1$ 时, $2x-3 = -1 \neq 0$, 所以 $x=1$ 是原分式方程的解.

(2) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$, 方程的两边同乘 $(x+1)(x-1)$, 得 $x+1-2(x-1) = 4$, 解得 $x=-1$. 检验: 当 $x=-1$ 时, $(x+1)(x-1) = 0$, 所以 $x=-1$ 是原分式方程的增根, 则原方程无解.

18. 【解】原式 $= \left[\frac{x-2}{x(x+2)} - \frac{x-1}{(x+2)^2} \right] \cdot \frac{x+2}{x-4} = \frac{x-2}{x(x-4)} - \frac{x-1}{(x+2)(x-4)} = \frac{(x-2)(x+2)-x(x-1)}{x(x+2)(x-4)} = \frac{x-4}{x(x+2)(x-4)} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{x^2+2x}$. 因为 $x^2+2x-1=0$, 所以 $x^2+2x=1$, 所以原式 $= 1$.

19. 【解】(1) 设甲种奖品的单价为 x 元/个, 则乙种奖品的单价为 $(3x-50)$ 元/个.

由题意得 $\frac{600}{x} = \frac{800}{3x-50}$, 解得 $x=30$.

经检验, $x=30$ 是原方程的根, 且符合实际意义, 则 $3x-50 = 3 \times 30 - 50 = 40$.

答: 甲种奖品的单价为 30 元/个, 乙种奖品的单价为 40 元/个.

(2) 设购买甲种奖品 m 个, 则购买乙种奖品 $(60-m)$ 个. 由题意得 $30m + 40(60-m) = 2\ 000$, 解得 $m=40$, 所以 $60-m = 60-40 = 20$. 答: 购买了 20 个乙种奖品.

关键点拨
分两种情况讨论: ①整式方程无解, ②分式方程产生增根无解. 注意不要漏解.

关键点拨
本题考查分式的加法, 充分理解新定义——“完美分式”的含义是解本题的关键.

20. 【解】(1) A 与 B 互为“完美分式”. 因为 $A + B = \frac{x-1}{x-4} + \frac{x-7}{x-4} = \frac{2(x-4)}{x-4} = 2$, 所以 A 与 B 互为“完美分式”, 且“完美值” $m=2$.

(2) ①因为 C 与 D 互为“完美分式”, 且“完美值” $m=3$, 所以 $C+D = \frac{3x-4}{x-2} + \frac{E}{x^2-4} = 3$, 所以 $\frac{(3x-4)(x+2)}{x^2-4} + \frac{E}{x^2-4} = 3$, 所以 $3x^2+2x-8+E = 3x^2-12$, 所以 $E = -2x-4$.

②因为 $E = -2x-4$, 所以 $D = \frac{-2x-4}{x^2-4} = -\frac{2}{x-2}$. 因为 x 为正整数, 分式 D 的值为正整数, 所以 $x=1$.